Série d'exercice 7

Exercice 1

a. Coefficient de corrélation entre les rendements de l'actif B et de l'actif C :

$$\rho_{BC} = \frac{\sigma_{BC}}{\sigma_B \sigma_C} = \frac{0.01}{0.16 \cdot 0.09} = 0.6944$$

b. Composition du portefeuille à variance minimale ayant un rendement $\mu_p = 0.15$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0.04 & 0.028 & 0.015 & 0.0015 \\ 0.028 & 0.0256 & 0.01 & 0.0012 \\ 0.015 & 0.01 & 0.0081 & 0.001 \\ 0.0015 & 0.0012 & 0.001 & 0.0009 \end{bmatrix} \quad \mu = \begin{bmatrix} 0.21 \\ 0.18 \\ 0.08 \\ 0.05 \end{bmatrix}$$

$A = 1'\Sigma^{-1}1 > 0$, A = 1134.480496

$B = 1'\Sigma^{-1}\mu$ = 52.709974

$C = \mu'\Sigma^{-1}\mu > 0$, C = 3.464436

$\Delta = AC - B^2 > 0$ = 1151.993394

$\lambda = \dfrac{C - \mu_p B}{\Delta}$ = -0.003856

$\gamma = \dfrac{\mu_p A - B}{\Delta}$ = 0.101964

Composition :

$$w = \lambda\Sigma^{-1}1 + \gamma\Sigma^{-1}\mu = \begin{bmatrix} 0.627869 \\ 0.247184 \\ -1.086430 \\ 1.211378 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 62.79\% \\ 24.72\% \\ -108.64\% \\ 121.14\% \end{bmatrix}$$

Variance :

$\sigma_p^2(\mu_p) = \dfrac{A\mu_p^2 - 2B\mu_p + C}{\Delta}$ = 0.011439

c. Portefeuille à variance minimale :

$$w_g = \frac{\Sigma^{-1}1}{1'\Sigma^{-1}1} = \begin{bmatrix} -0.052374 \\ 0.024402 \\ 0.055645 \\ 0.972327 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5.24\% \\ 2.44\% \\ 5.56\% \\ 97.23\% \end{bmatrix}$$

Rendement espéré :

$\mu_g = \dfrac{B}{A}$ = 0.046462

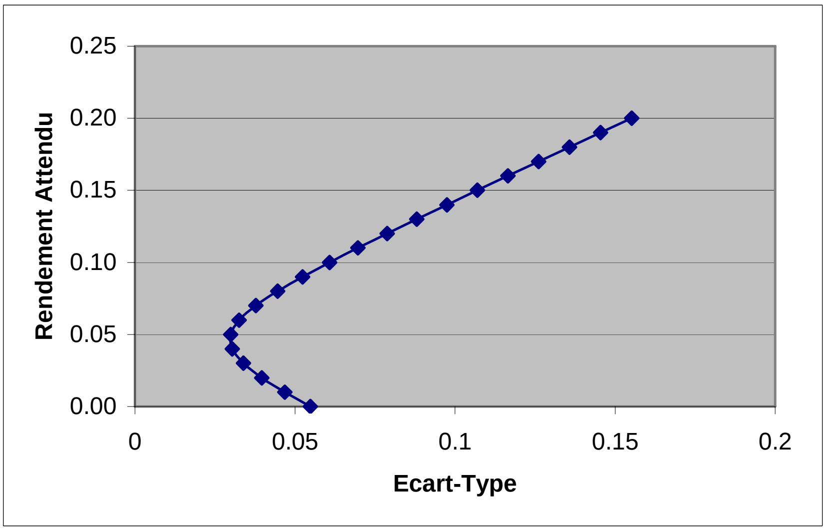
Écart-type :

$\sigma_g = \sqrt{\dfrac{1}{A}}$ = 0.029689

d. Graphique μ_p de 0 à 0.20 :

$$\sigma_p(\mu_p) = \sqrt{\frac{A\mu_p^2 - 2B\mu_p + C}{\Delta}}$$

Rendement	Ecart-Type
0.00	0.054839221
0.01	0.046805031
0.02	0.039636364
0.03	0.033887037
0.04	0.030374014
0.05	0.029896316
0.06	0.032587701
0.07	0.037776797
0.08	0.044600157
0.09	0.05242348
0.10	0.060862369
0.11	0.069693574
0.12	0.078785279
0.13	0.088056831
0.14	0.097456916
0.15	0.106951648
0.16	0.116517891
0.17	0.126139378
0.18	0.135804366
0.19	0.145504187
0.20	0.155232312



e. Lagrangien

$$\max_w w'\mu \text{ s.c. } 1'w = 1,\ w'\Sigma w = \sigma_p^2$$

$$L = w'\mu + \lambda(1 - 1'w) + \gamma(\sigma_p^2 - w'\Sigma w)$$

$$\frac{\partial L}{\partial w} = \mu - \lambda 1 - \gamma 2\Sigma w = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 1 - 1'w = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \gamma} = \sigma_p^2 - w'\Sigma w = 0$$

f. Portefeuille Optimal sans Actif sans Risque pour une fonction d'utilité :

$$V = E(R_p) - 2Var(R_p) = \mu_p - \frac{a}{2}\sigma_p^2 \text{ => a = 4}$$

Composition :

$$w = \frac{1 - \frac{B}{a}}{A}\Sigma^{-1}1 + \frac{1}{a}\Sigma^{-1}\mu = \begin{bmatrix} 1.615473 \\ 0.570628 \\ -2.744543 \\ 1.558442 \end{bmatrix}$$

Rendement :

$\mu_p = \mu' w$ = 0.300321

Ecart-Type :

$\sigma_p = \sqrt{w'\Sigma w}$ = 0.253666

Exercice 2

a. Oui, même si le titre C à un rendement espéré inférieur au titre B, tout en avant le même écart-type, il peut être intéressant, car il est très peux corrélé avec celui-ci, et permet donc une bonne diversification.

b. Portefeuille de tangence

$\Sigma = \begin{bmatrix} 0.09 & 0.015 & 0.012 \\ 0.015 & 0.04 & 0.003 \\ 0.012 & 0.003 & 0.04 \end{bmatrix}$, $\mu = \begin{bmatrix} 0.20 \\ 0.15 \\ 0.10 \end{bmatrix}$, R = 0.08, a = 4

$A = 1'\Sigma^{-1}1 > 0$, A = 48.212493

$B = 1'\Sigma^{-1}\mu$ = 6.360127

$C = \mu'\Sigma^{-1}\mu > 0$, C = 0.935912

$w_t = \dfrac{\Sigma^{-1}(\mu - R1)}{B - AR} = \begin{bmatrix} 0.440311 \\ 0.531927 \\ 0.027762 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 44.03\% \\ 53.19\% \\ 2.78\% \end{bmatrix}$,

$\mu_t = \dfrac{C - BR}{B - AR}$ = 0.170627

$\sigma_t^2 = \dfrac{C - 2BR + AR^2}{(B - AR)^2}$ = 0.036206

c. $\omega_t = \dfrac{\mu_t - R}{a\sigma_t^2}$ = 0.6258, donc on investi 62,58% de notre capital dans le portefeuille risqué et le reste dans l'actif sans risque, c'est à dire 37,42%

d. Avec 100'000 francs :
Actif sans risque : 100'000 * 37,42% = 37'420
Actifs risqué A : 100'000 * 62,58% * 44,03% = 27'554
Actifs risqué B : 100'000 * 62,58% * 53,19% = 33'286
Actif risqué C : 100'000 * 62,58% * 2,78% = 1'740

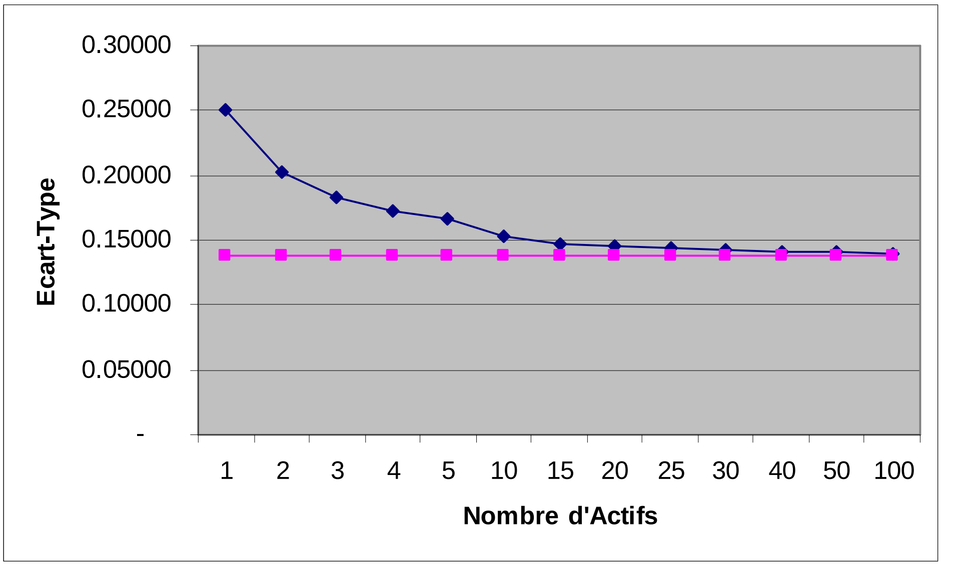
Exercice 3

a. Ecart-Type des portefeuilles :

$\sigma_p = \sqrt{\dfrac{1}{N}\overline{\sigma^2} + \dfrac{N-1}{N}\overline{\sigma}}$ avec $\overline{\sigma^2} = 0.25 * 0.25 = 0.0625$, $\overline{\sigma} = 0.3028 * 0.25 * 0.25 = 0.01893$

b. Graphique :

N	Ecart-Type
1	0.25000
2	0.20177
3	0.18289
4	0.17268
5	0.16625
10	0.15259
15	0.14775
20	0.14527
25	0.14376
30	0.14275
40	0.14147
50	0.14070
100	0.13914



c. On voit que des qu'on a plusieurs actifs, le risque diminue, c'est l'avantage de la diversification. On observe aussi que cette effets à une limite qui est appelé risque systématique. Dans notre cas la majeure partie des avantages de la diversification est réalisée avec 15 ou 30 actifs.

Exercice 4

a. Rendement continûment composé journalier moyen :

Transformer les prix en rendement avec $\ln\left(\frac{P_{t+1}}{P_t}\right)$ puis on calcule la moyenne $\frac{1}{N}\sum(r_t)$ et l'écart-type

$$\sqrt{\frac{\sum\left(r_t - \overline{r_t}\right)^2}{(N-1)}}$$

Nestlé : rendement moyen 0.0000778, écart-type 0.0133847
Novartis : rendement moyen 0.0000181, écart-type 0.0141078
Swatch : rendement moyen 0.0000783, écart-type 0.0223181

b. Coefficient d'asymétrie :
Nestlé : -0.018409
Novartis : 0.10402
Swatch : 0.057195
Les 3 coefficients sont proche de 0, donc la répartition est normale.

c. Covariances (N = 1195) : $\frac{\sum(x-\overline{x})(y-\overline{y})}{N}$

COV(Nestlé, Novartis) = 0.00009557
COV(Nestlé, Swatch) = -0.00001245
COV(Novartis, Swatch) = 0.00000374

d. Portefeuille à variance minimal global:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0.0001792 & 0.0000956 & 0.0000125 \\ 0.0000956 & 0.0001990 & 0.0000037 \\ 0.0000125 & 0.0000037 & 0.0004981 \end{bmatrix}$$

$$w_g = \frac{\Sigma^{-1}1}{1'\Sigma^{-1}1} = \begin{bmatrix} 0.424473 \\ 0.361413 \\ 0.214114 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 42.45\% \\ 36.14\% \\ 21.41\% \end{bmatrix}$$

$$\sigma_g^2 = \frac{1}{1'\Sigma^{-1}1} = 0.027$$