

## Série d'exercices 12

### Exercice 1

#### a. r

Le ratio de sharpe  $SR_j = \frac{r_j - r}{\sigma_j} = 0.733$  et on connaît  $r_j = \frac{100-80}{80} = 25\%$ , ainsi que  $\sigma_j = 0.3$ , donc

$$r = r_j - SR_j \cdot \sigma_j = 0.25 - 0.733 \cdot 0.3 = 3.01\%$$

#### b. Risque neutre

$u = 150/100 = 1.5$ ,  $d = 90/100 = 0.9$ ,  $r = 0.0301$   
pour une hausse

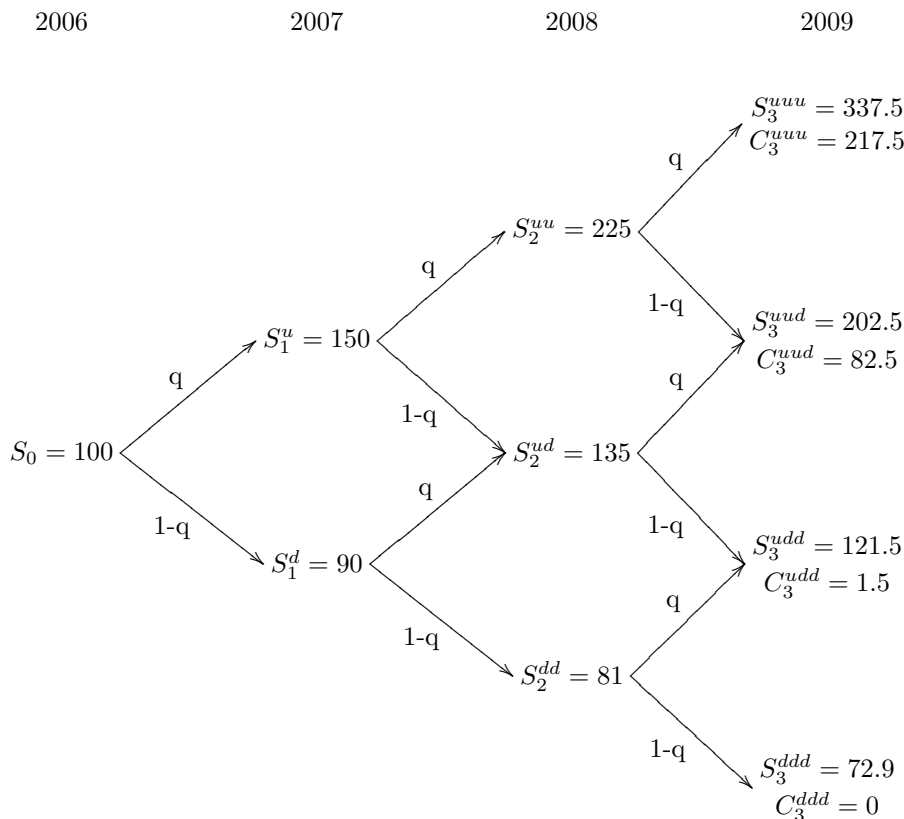
$$q = \frac{1 + r - d}{u - d} = \frac{1 + 0.0301 - 0.9}{1.5 - 0.9} = 0.2166 = 21.68\%$$

pour une baisse

$$1 - q = 0.7834 = 78.32\%$$

#### c. Prix 2006 d'une option call 2009, $X = 120$

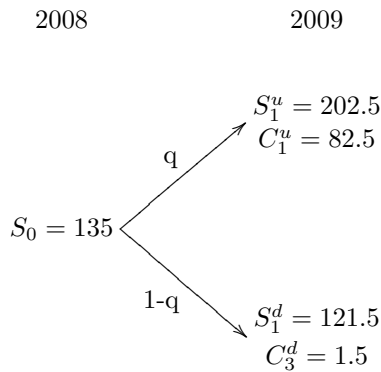
$r$ ,  $d$  et  $u$  sont constants dans le temps, donc  $q$  est identique pour toutes les périodes.



$$C_0 = \frac{E_0^Q(C_3)}{(1+r)^3} = \frac{q^3 C_3^{uuu} + 3q^2(1-q)C_3^{uud} + 3q(1-q)^2 C_3^{udd} + (1-q)^3 C_3^{ddd}}{(1+r)^3}$$

$$C_0 = \frac{0.2168^3 \cdot 217.5 + 3 \cdot 0.2168^2 \cdot 0.7832 \cdot 82.5 + 3 \cdot 0.2168 \cdot 0.7832^2 \cdot 1.5 + 0}{(1.0301)^3} = 10.91$$

**d. Portefeuille de réplcation 2008, cours = 135.-**



$$a_0 = \frac{C_1^u - C_1^d}{S_0(u - d)} = \frac{82.5 - 1.5}{135(1.5 - 0.9)} = 1$$

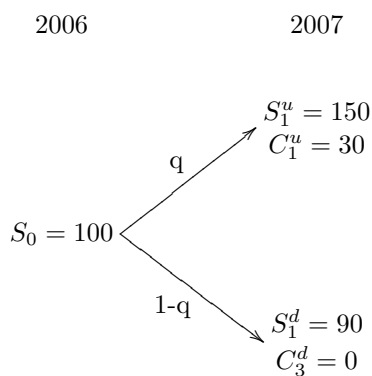
$$b_0 = \frac{C_1^d u - C_1^u d}{(1+r)(u-d)} = \frac{1.5 \cdot 1.5 - 82.5 \cdot 0.9}{1.0301 \cdot 0.6} = -116.49$$

ou

$$\begin{cases} aS_3^u + b(1+r) = 82.5 \\ aS_3^d + b(1+r) = 1.5 \end{cases}$$

Le portefeuille de réplcation est donc de 100% d'actions et d'un emprunt de 116.49. Ceci vient du fait que l'on a une valeur  $> 0$  dans les deux cas  $C_1^u$  et  $C_1^d$ , donc autant acheter l'action tout de suite.

**e. Portefeuille de réplcation, X = 120**



$$a_0 = \frac{C_1^u - C_1^d}{S_0(u - d)} = \frac{30 - 0}{100(1.5 - 0.9)} = 0.5$$

$$b_0 = \frac{C_1^d u - C_1^u d}{(1+r)(u-d)} = \frac{0 \cdot 1.5 - 30 \cdot 0.9}{1.0301 \cdot 0.6} = -43.68$$

Le portefeuille de réplcation est donc de 50% d'actions et d'un emprunt de 43.68.

## f. Probabilité physique

On exerce l'option de vente quand la valeur de l'option d'achat  $< 20$

$$C_2^{uu} = \frac{0.2168 \cdot 217.5 + 0.7832 \cdot 82.5}{1.0301} = 108.5 > 20$$

$$C_2^{ud} = \frac{0.2168 \cdot 82.5 + 0.7832 \cdot 1.5}{1.0301} = 18.5 < 20$$

$$C_2^{dd} = \frac{0.2168 \cdot 1.5 + 0.7832 \cdot 0}{1.0301} = 0.315 < 20$$

Si on calcule les probabilités on arrive à :

$$0.4^2 + 2 \cdot 0.4 \cdot 0.6 = 0.64 = 64\%$$

$$\text{ou } 1 - P^{uu} = 1 - 0.6^2 = 0.64$$

## g. Rendement

Valeurs de l'option de vente :

$$C_{2008}^{uu} = 0$$

$$C_{2008}^{ud} = (20 - 18.50) = 1.5$$

$$C_{2008}^{dd} = (20 - 0.315) = 19.685$$

$$P_{2007}^u = 1.14$$

$$P_{2007}^d = 15.28$$

Valeur espérée :

$$R^u = \frac{0.6 \cdot 0 + 0.4 \cdot 1.51 - 1.14}{1.14} = -0.47$$

$$R^d = \frac{0.6 \cdot 1.51 + 0.4 \cdot 19.685 - 15.28}{15.28} = -0.4254$$

$$\text{Rendement espéré : } R = 0.6(-0.47) + 0.4(-0.4254) = -0.45$$

## h. Nombre d'options

$$C_0 = a_0 S_0 + b_0 = 0.5 \cdot 100 - 43.68 = 6.32 \quad \rightarrow \quad 1000/6.32 = 158 \text{ options}$$

## i. a et b

Nous savons déjà que  $a_0 = 0.5$  et  $b_0 = -43.68$ .

Total en action =  $158 \cdot 0.5 = 79$  actions pour une valeur de 7900.- et  $158 \cdot 43.68 = 6901.44$ .- d'emprunt.

## Exercice 2

### a. Graphique

Vous achetez une action et une option de vente avec un prix d'exercice de CHF 60, et vous remboursez un emprunt de CHF 40. (voir Fig. 1 à la page 4)

### b. Graphique

Vous achetez une action et une option d'achat, et vous vendez deux options put. Le prix d'exercice de l'option d'achat est de CHF 30 et celui de chaque option put de CHF 50. (voir Fig. 2 à la page 5)



FIG. 1 – Graphique 2a

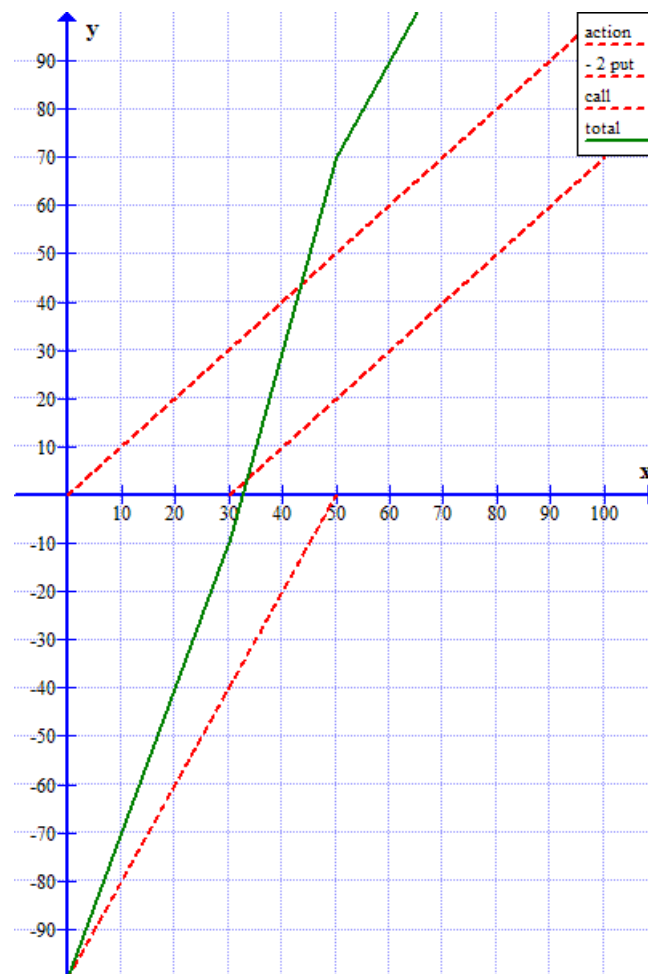


FIG. 2 – Graphique 2b

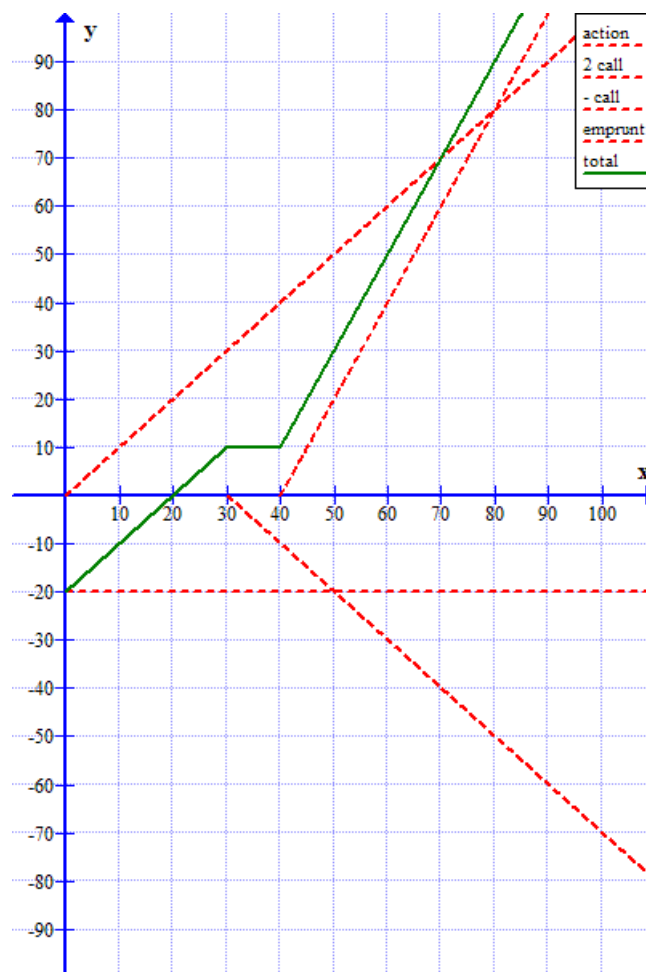


FIG. 3 – Graphique 2c

### c. Graphique

Vous achetez une action et deux options call avec un prix d'exercice de CHF 40 chacune, vous vendez une option call avec un prix d'exercice de CHF 30, et vous remboursez un emprunt de CHF 20. (voir Fig. 3 à la page 6)

## Exercice 3

### a. r et q

$$u_\alpha = 13/10 = 1.3, d_\alpha = 9/10 = 0.9, u_\beta = 11/10 = 1.1, d_\beta = 10/10 = 1$$

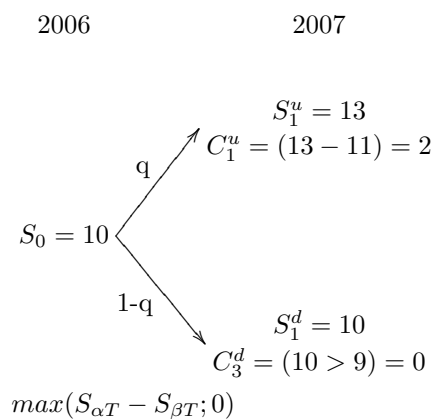
$$q = \frac{1 + r - d_\alpha}{u_\alpha - d_\alpha} = \frac{1 + r - d_\beta}{u_\beta - d_\beta}$$

$$r = \frac{-u_\beta + d_\beta + u_\alpha - d_\alpha + d_\alpha u_\beta - d_\alpha d_\beta - d_\beta u_\alpha + d_\beta d_\alpha}{u_\beta - d_\beta - u_\alpha + d_\alpha}$$

$$r = \frac{-1.1 + 1 + 1.3 - 0.9 + 0.9 \cdot 1.1 - 0.9 \cdot 1 - 1 \cdot 1.3 + 1 \cdot 0.9}{1.1 - 1 - 1.3 + 0.9} = 0.033$$

$$q = \frac{1 + r - d_\alpha}{u_\alpha - d_\alpha} = \frac{1 + 0.033 - 0.9}{1.3 - 0.9} = 0.33 = \frac{1 + r - d_\beta}{u_\beta - d_\beta} = \frac{1 + 0.033 - 1}{1.1 - 1} = 0.33$$

### b. Portefeuille de réplcation



$$\begin{cases} 13a + 11b = 2 \\ 9a + 10b = 0 \end{cases}$$

Le portefeuille de réplcation est donc de 64.51% d'actions et d'un emprunt de 0.58.

### c. Valeur de l'option fin 2006

$$C_0 = \frac{q \cdot 2 + (1 - q) \cdot 0}{1.0333} = \frac{1/3 \cdot 2 + 0}{1.0333} = 0.6451$$